SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tanja Krog

TROKUTI S CJELOBROJNIM STRANICAMA I TRISEKTIBILNIM KUTOVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Posebna zahvala mentoru prof. dr. sc. Juraju Šiftaru za trud, strpljivost, provedeno vrijeme i pruženu pomoć. Bez njega, sve ovo bilo bi nemoguće.

Hvala mojim roditeljima, mami i tati, na razumijevanju i nesebičnoj žrtvi svih ovih godina. Zahvaljujem se i baki za svaki skuhani ručak, za svu brižnost i dobrotu.

Mom zaručniku Igoru i bratu Dominiku
od srca hvala što su svojom blizinom olakšali sve teške trenutke. Hvala im za svako zajedničko učenje, za ogromnu podršku i pomoć koju mi pružaju.

Hvala mojim prijateljicama i kolegicama na svem vremenu provdenom zajedno.

I na kraju, najveća hvala dragom Bogu što mi je pružio sve što imam.

Sadržaj

Uvod

Tijekom 5. stoljeća prije Krista starogrčki matematičari počeli su zahtijevati da se sve geometrijske konstrukcije provode isključivo ravnalom i šestarom. To je dovelo do postavljanja niza zadataka, od čega su najpoznatija takozvana tri klasična problema. Među njima nalazi se i problem trisekcije kuta, odnosno problem konstruktivnog nalaženja trećine zadanog kuta. Ovaj problem razlikovao se od preostalih jer ga je bilo moguće riješiti za neke posebne slučajeve.

U ovom radu proučavat ćemo klasu trokuta čije su duljine stranica cijeli brojevi, a sva tri kuta su trisektibilna. Naglasak će biti na uvjetima koji trebaju biti ispunjeni da bi kutovi u trokutu s cjelobrojnim stranicama bili trisektibilni. Dokazuje se da je kut θ trisektibilan ako i samo ako vrijedi $\cos\theta = 4t^3 - 3t$ za neki racionalni broj iz intervala $\langle -1, 1\rangle$. No, radi potpunosti, rad ćemo započeti s teorijskom osnovom konstruktibilnih i trisektibilnih kutova, a kao rezultat prvog dijela rada, navest ćemo listu prvih tridesetak vrijednosti kosinusa trisektibilnih kutova.

U drugom poglavlju ukratko se pitamo postoje li pravokutni, jednakokračni ili jednakostranični trokuti s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima. Osim navođenja nekoliko konkretnih primjera, o pravokutnim trokutima s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima nešto više će se govoriti na samom kraju rada. U ovom dijelu, prikazat ćemo R. A. Gordonovu jednostavnu metodu za pronalaženje nekih posebnih, ali beskonačnih klasa trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima.

U trećem poglavlju definirat ćemo rezidual, pozitivan cijeli broj koji je pridružen svakom kutu s racionalnom vijednosti kosinusa. Jednakost reziduala pokazat će se kao nužan i dovoljan uvjet da bi se dva šiljasta kuta našla u jednom trokutu s cjelobrojnim stranicama.

U pretposljednjem poglavlju izveden je oblik opće formule za stranice promatranih trokuta. Na temelju te formule može se pokazati da za svaki kvadratno slobodan pozitivan cijeli broj r postoji beskonačno mnogo različitih trokuta s cjelobrojnim stranicama čiji su kutovi trisektibilni i zajednički im je rezidual jednak r.

Na samom kraju rada, prikazat ćemo rezultat W. D. Changa i R. A. Gordona koji pokazuje da su kutovi primitivnog Pitagorinog trokuta trisektibilni ako i samo ako je njegova hipotenuza potpuni kub.

Poglavlje 1

Konstruktibilni i trisektibilni kutovi

Prije nego što ćemo istražiti trokute s trisektibilnim kutovima, moramo definirati što znači da je kut trisektibilan. Da bismo to mogli, najprije moramo definirati konstruktibilan kut, odnosno konstruktibilne brojeve.

1.1 Konstruktibilni brojevi

U geometriji postoje različite vrste konstrukcija, s obzirom na raspoloživa sredstva i dopuštene postupke. Ovdje razmatramo samo konstrukcije pomoću šestara i ravnala bez mjernih oznaka. Dakle, pomoću šestara može se konstruirati kružnica ili luk kružnice sa zadanim središtem i zadanim polumjerom. Pomoću ravnala može se nacrtati bilo koja dužina koja pripada pravcu zadanom dvjema točkama. Također, podrazumijeva se da se primjenom šestara i ravnala može konstruirati sjecište dvaju neparalelnih pravaca, dva sjecišta kružnice i pravca te dva sjecišta dviju kružnica. Tako će pojam konstruktibilnosti značiti mogućnost konstrukcije iz nekih zadanih elemenata, primjenom samo ravnala i šestara.

Ključnu ulogu imat će konstruktibilnost dužine zadanog mjernog broja, to jest duljine, uz pretpostavku da je zadana dužina koja se uzima kao jedinična (tj. mjernog broja 1). Kraće, govorit ćemo o konstruktibilnosti pozitivnog realnog broja ρ u smislu sljedeće definicije.

Definicija 1.1.1. *Realan broj ρ je konstruktibilan ako se, za danu dužinu duljine x, dužina duljine $|\rho|\,x$ može konstruirati sa šestarom i ravnalom bez mjernih oznaka.*

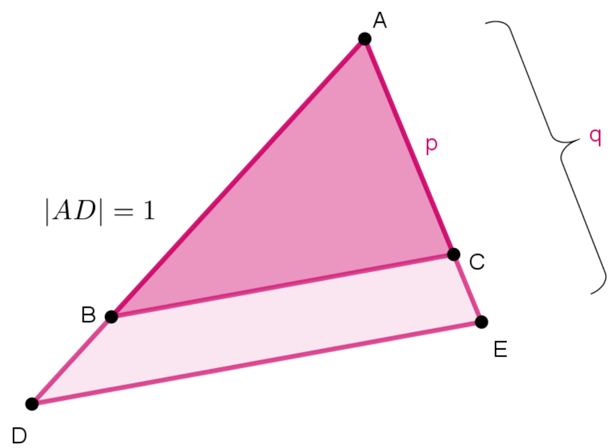
Odsad ćemo pretpostavljati da je zadana samo jedinična dužina, a konstruktibilnost će se odnositi na sve realne brojeve.

Sada kada imamo definiciju, možemo utvrditi koji realni brojevi su konstruktibilni.

Teorem 1.1.2. *Svi racionalni brojevi su konstruktibilni.*

Dokaz.
Ako je zadana dužina $\overline{AB}$ duljine 1, jasno je da možemo nanoseći n puta tu jediničnu dužinu (pomoću šestara), na pravcu konstruirati dužinu čija je duljina zadani pozitivan cijeli broj n. Stoga, zaključujemo da je svaki cijeli broj konstruktibilan.

Preostaje nam pokazati da su i pozitivni racionalni brojevi koji nisu cijeli, također konstruktibilni. Neka je r pozitivan racionalan broj takav da nije cijeli broj. Prema definiciji znamo da postoje pozitivni cijeli brojevi p i q, $q \neq 1$, takvi da je $r = \frac{p}{q}$. Pretpostavimo da je $q > p$. Budući da su p i q pozitivni cijeli brojevi, možemo konstruirati dužine $\overline{AC}$ i $\overline{AE}$ takve da je $|AC| = p$ i $|AE| = q$. Iz sličnih trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$, gdje je $|AD| = 1$, slijedi $|AB| : |AD| = |AC| : |AE|$. Odnosno $|AB| : 1 = p : q$, iz čega dobivamo da je $|AB| = \frac{p}{q} = r$, što smo i trebali dokazati.



Slika 1.1: Dokaz teorema 1.1.2

U slučaju kada je $p > q$, možemo napraviti istu konstrukciju gdje je $|AC| = q$, $|AE| = p$ i $|AB| = 1$.

Budući da je r bilo koji pozitivan broj iz skupa $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$, znamo da su svi pozitivni racionalni brojevi iz skupa $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ konstruktibilni. Kako smo na početku dokazali da su svi cijeli brojevi konstruktibilni, slijedi da su i svi racionalni brojevi konstruktibilni.

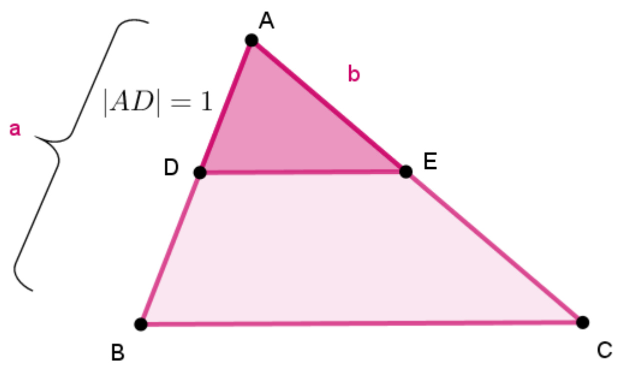
$\square$

Kako bismo odredili skup svih konstruktibilnih brojeva, istražit ćemo algebarske operacije s obzirom na koje je taj skup zatvoren.

Teorem 1.1.3. *Skup konstruktibilnih brojeva je zatvoren s obzirom na operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i vađenja drugog korijena.*

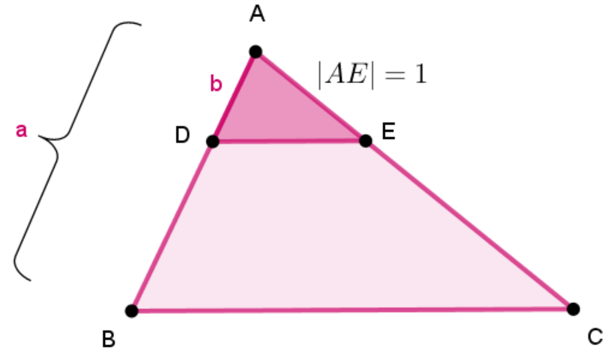
Dokaz.
Ako su zadane, odnosno konstruirane dužine $\overline{AB}$ duljine a i $\overline{BC}$ duljine b, jasno je da možemo, nanošenjem (pomoću šestara) odgovarajućih dužina, na jednom pravcu konstruirati dužine duljine $a + b$, odnosno $|a - b|$.

Dužinu duljine $a \cdot b$ možemo konstruirati koristeći jednakost $b : 1 = ab : a$ i pomoću sličnih trokuta. Na slici 1.2 imamo da je $|AD| = 1$, $|AE| = b$, $|AB| = a$, iz čega zbog sličnosti trokuta $\triangle ADE$ i $\triangle ABC$ slijedi da je $|AC| = ab$.



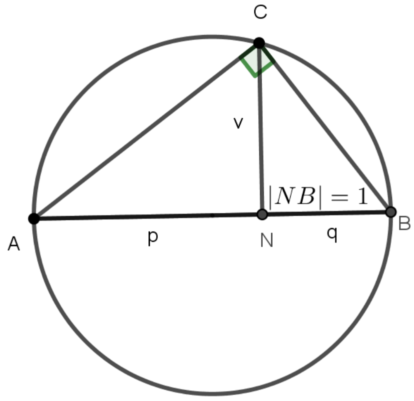
Slika 1.2: Dokaz teorema 1.1.3 za množenje

Slično, pomoću jednakosti $a : b = \frac{a}{b} : 1$ i sličnih trokuta $\triangle ADE$ i $\triangle ABC$, gdje je $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AE| = 1$ dobivamo $|AC| = \frac{a}{b}$. (Na slici 1.3 je prikazan slučaj $a > b$.)



Slika 1.3: Dokaz teorema 1.1.3 za dijeljenje

Preostaje konstruiranje dužine duljine $\sqrt{a}$ za zadanu $|AB| = a$. Primijenit ćemo poznatu činjenicu da u pravokutnom trokutu duljina visine v iz vrha C pravog kuta iznosi $v = \sqrt{pq}$, pri čemu su p i q duljine odsječaka $\overline{AN}$ i $\overline{NB}$ na hipotenuzi, a N nožište visine iz vrha C. Stoga, ako konstruiramo dužinu $\overline{AB}$ i na njoj točku N tako da je $|AN| = a$ i $|NB| = 1$ (ili obrnuto), bit će $|CN| = \sqrt{a}$. Vrh C dobivamo tako da konstruiramo polukružnicu nad promjerom $\overline{AB}$ i zatim sjecište te polukružnice s okomicom na $\overline{AB}$ u točki N. Po Talesovom teoremu $\sphericalangle ACB$ je pravi kut.



Slika 1.4: Dokaz teorema 1.1.3 za vađenje drugog korijena

□

Sada možemo dokazati glavni teorem o konstruktibilnosti pozitivnih realnih brojeva. Iz prethodnih teorema znamo da skup konstruktibilnih brojeva sadrži skup pozitivnih racionalnih brojeva i njihove kvadratne korijene, kao i sve brojeve koji se iz njih mogu dobiti primjenom operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i vađenja drugog korijena. Sljedeći teorem pokazat će da se svaki konstruktibilni broj može dobiti na opisani način.

Teorem 1.1.4. *Broj je konstruktibilan ako i samo ako može biti dobiven u konačno mnogo koraka zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i kvadratnih korijena racionalnih brojeva.*

Dokaz.
Uvedimo u euklidsku ravninu Kartezijev koordinatni sustav kako bismo pravce i kružnice mogli prikazati jednadžbama i analitički izraziti rezultate primjene osnovnih konstrukcija. Tada sjecište pravaca odgovara rješenju dviju linearnih jednadžbi s 2 nepoznanice, a sjecište pravca i kružnice svodi se na rješavanje kvadratne jednadžbe. Određivanje sjecišta

dviju kružnica također se svodi na određivanje sjecišta kružnice i pravca. Kako su rješenja kvadratnih jednadžbi, čiji su koeficijenti konstruktibilni brojevi, također konstruktibilna, vidimo da se svaki konstruktibilni broj doista može dobiti primjenom konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i vađenja kvadratnih korijena.

□

Sada ćemo dokazati teorem o konstruktibilnosti brojeva koji su korijeni kubne jednadžbe. To će zahtijevati neke leme i definicije.

Lema 1.1.5 (Bézoutov teorem)**.** *r je korijen polinoma $p(x)$ ako i samo ako $(x - r)$ dijeli $p(x)$.*

Dokaz.
$\Rightarrow$ Neka je r korijen polinoma $p(x)$. Po teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom, slijedi da $p(x)$ možemo zapisati i kao $p(x) = (x-r)q(x) + R$, gdje je $q(x)$ kvocijentni polinom, a R ostatak. Uvrštavanjem $x = r$ u gornju jednakost, dobivamo $R = 0$ što znači da $(x - r)$ dijeli $p(x)$.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da $(x - r)$ dijeli $p(x)$, tada postoji $q(x)$ takav da je $p(x) = (x - r)q(x)$. Uvrštavanjem $x = r$ dobivamo $p(r) = 0$, tj. r je korijen polinoma $p(x)$.

□

Lema 1.1.6. *Ako su r_1, r_2, r_3 korijeni kubne jednadžbe $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onda je $b = -(r_1 + r_2 + r_3)$.*

Dokaz.
Prema Bézoutovom teoremu i činjenici da je koeficijent od x^3 jednak jedan, znamo da svaki od $(x - r_1)$, $(x - r_2)$ i $(x - r_3)$ dijeli naš polinom $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Stoga, jednadžbu $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ možemo zapisati kao $(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$. Množenjem tih faktora dobivamo da je koeficijent od x^2 jednak $-(r_1 + r_2 + r_3)$ i stoga je $b = -(r_1 + r_2 + r_3)$.

□

Definicija 1.1.7. *Za $n \in \mathbb{N}$ kažemo da je kvadratno slobodan ako ne postoji $m \in \mathbb{N}, m > 1$, takav da je n djeljiv s m^2.*

Drugačije rečeno, u rastavu n na prim faktore, nema prim faktora s eksponentom većim od 1, što znači da je kvadratno slobodni n jednak umnošku nekih različitih prim brojeva

$$n = p_1 \cdots p_k.$$

Svaki $n \in \mathbb{N}$ može se napisati u obliku $n = m^2 \cdot n_0$, pri čemu je n_0 kvadratno slobodan ili 1. Po dogovoru se broj 1 uzima kao kvadratno slobodan.

Za pozitivan racionalni broj $q = \frac{a}{b}$, pri čemu je $M(a, b) = 1$, kažemo da je kvadratno slobodan ako su a i b oba kvadratno slobodni.

Definicija 1.1.8. *Neka je x element iz skupa* $\left\{a + b\sqrt{r} \mid a, b, r \in \mathbb{Q} \text{ i } r \text{ kvadratno slobodan}\right\}$. *Konjugat od x, označen kao* $\overline{x}$, *dan je kao* $a - b\sqrt{r}$, *gdje je* $x = a + b\sqrt{r}$.

Lema 1.1.9. *Konjugat sume dvaju elemenata iz skupa*

$$\left\{a + b\sqrt{r} \mid a, b, r \in \mathbb{Q} \text{ i } r \text{ kvadratno slobodan}\right\}$$

jednak je sumi konjugata. Konjugat umnoška dvaju elemenata iz tog skupa jednak je umnošku konjugata.

Dokaz.
Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Promotrimo:

$$\begin{aligned}\overline{\left(a + b\sqrt{r}\right) + \left(c + d\sqrt{r}\right)} &= \overline{(a + c) + (b + d)\ \sqrt{r}} = (a + c) - (b + d)\left(\sqrt{r}\right)\\ &= \left(a - b\sqrt{r}\right) + \left(c - d\sqrt{r}\right) = \overline{a + b\sqrt{r}} + \overline{c + d\sqrt{r}}\end{aligned}$$

Ovime je dokazan slučaj za zbrajanje.

Kako bismo dokazali tvrdnju za množenje, raspišimo sljedeća dva izraza
$\overline{\left(a + b\sqrt{r}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{r}\right)}$ i $\overline{\left(a + b\sqrt{r}\right)} \cdot \overline{\left(c + d\sqrt{r}\right)}$:

$$\overline{\left(a + b\sqrt{r}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{r}\right)} = \overline{(ac + rbd) + (ad + bc)\ \sqrt{r}} = (ac + rbd) - (ad + bc)\ \sqrt{r}$$
$$\overline{\left(a + b\sqrt{r}\right)} \cdot \overline{\left(c + d\sqrt{r}\right)} = \left(a - b\sqrt{r}\right) \cdot \left(c - d\sqrt{r}\right) = (ac + rbd) - (ad + bc)\ \sqrt{r}$$

Usporedbom dobivenih izraza uočavamo da je

$$\overline{\left(a + b\sqrt{r}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{r}\right)} = \overline{\left(a + b\sqrt{r}\right)} \cdot \overline{\left(c + d\sqrt{r}\right)}.$$

□

Lema 1.1.10. *Neka je* $R = a + b\sqrt{r}$ *gdje su* a, b, $r \in \mathbb{Q}$ *i* r *je kvadratno slobodan. Ako je* R *korijen polinoma s racionalnim koeficijentima, onda je konjugat* $\overline{R} = a - b\sqrt{r}$ *također korijen tog polinoma.*

Dokaz.
Pretpostavimo da imamo polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdje je $a_i \in \mathbb{Q}$ za svaki $0 \leq i \leq n$ takav da

$$p\left(a + b\sqrt{r}\right) = a_n\left(a + b\sqrt{r}\right)^n + a_{n-1}\left(a + b\sqrt{r}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(a + b\sqrt{r}\right) + a_0 = 0.$$

Budući da konjugat od 0 iznosi 0, određivanjem konjugata obje strane prethodne jednakosti, dobivamo:

$$\overline{a_n\left(a + b\sqrt{r}\right)^n + a_{n-1}\left(a + b\sqrt{r}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(a + b\sqrt{r}\right) + a_0} = 0.$$

Iz prethodne leme koja kaže da je konjugat sume jednak sumi konjugata, slijedi da lijevu stranu jednakosti možemo zapisati kao

$$\overline{a_n\left(a + b\sqrt{r}\right)^n} + \overline{a_{n-1}\left(a + b\sqrt{r}\right)^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1\left(a + b\sqrt{r}\right) + a_0}.$$

Budući da je konjugat svakog racionalnog broja sam taj broj, a koeficijenti našeg polinoma su racionalni brojevi, oni će nakon konjugacije ostati nepromijenjeni. Sada znamo da je konjugat od $a + b\sqrt{r}$ korijen našeg polinoma.

□

Sada slijedi glavni teorem ovog dijela.

Teorem 1.1.11. *Kubna jednadžba s racionalnim koeficijentima ima konstruktibilni korijen ako i samo ako ta jednadžba ima racionalni korijen.*

Dokaz.
$\Rightarrow$ Neka je $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom trećeg stupnja s racionalnim koeficijentima. Dijeljenjem polinoma $p(x)$ s vodećim koeficijentom, ako je potrebno, dobivamo polinom kojemu je vodeći koeficijent jednak jedan (kako bi se mogla primijeniti lema 1.1.6). Pretpostavimo da $p(x)$ ima konstruktibilni korijen $R_1 = m + n\sqrt{r}$ gdje su $m, n, r \in \mathbb{Q}$. Tada po lemi 1.1.10 znamo da postoji drugi korijen R_2 takav da je $R_2 = \overline{R_1} = m - n\sqrt{r}$. Neka je treći korijen naše kubne jednadžbe s. Po lemi 1.1.6 vrijedi da je $R_1 + R_2 + s = -b$, gdje je b racionalan koeficijent naše kubne jednadžbe. Stoga je zbroj triju korijena kubne jednadžbe $m + n\sqrt{r} + m - n\sqrt{r} + s = 2m + s$ racionalan broj. Budući da je m racionalan broj, s također mora biti racionalan broj (jer $s = (2m + s) - 2m$, a $2m$, $2m + s \in \mathbb{Q}$). Stoga naša kubna jednadžba s racionalnim koeficijentima ima racionalni korijen s kada ima konstruktibilni korijen.

$\Leftarrow$ Ako $p(x)$ ima racionalan korijen r, tada po teoremu 1.1.2 slijedi da $p(x)$ ima konstruktibilni korijen.

□

1.2 Konstruktibilni kutovi

Uz opću teoriju o konstruktibilnim brojevima, započinjemo razmatranje konstruktibilnih kutova. Budući da su duljine i kutovi dobro povezani trigonometrijskim funkcijama, započinjemo našu teoriju s njima.

Teorem 1.2.1. *Kut θ je konstruktibilan ako i samo ako je $\cos\theta$ konstruktibilan broj. Posebno, ako je $\cos\theta$ racionalan broj tada je θ konstruktibilan.*

Dokaz.
$\Rightarrow$ Neka je θ konstruktibilan kut takav da mu se krakovi nalaze na pravcima a i b, a točka C koja je presjek tih dvaju pravaca je vrh kuta. Na kraku a po volji odaberimo točku A i u njoj konstruiramo pravac c okomit na a. Presjek pravaca b i c označimo točkom B. Rezultat je pravokutni trokut gdje je kosinus kuta θ kvocijent stranica $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$. Po teoremu 1.1.3 slijedi da je $\frac{|CA|}{|CB|}$ konstruktibilan broj i stoga je $\cos\theta$ konstruktibilan broj.

$\Leftarrow$ Neka je $\cos\theta$ konstruktibilna duljina, tada po teoremu 1.1.3 znamo da je duljina $\sqrt{1-\cos^2\theta}$ također konstruktibilna. Neka je dužina $\overline{AB}$ duljine $\cos\theta$. Budući da je $\cos\theta$ konstruktibilna duljina, možemo konstruirati dužinu $\overline{BC}$ duljine $\sqrt{1-\cos^2\theta}$ koja će biti okomita na $\overline{AB}$. Spajanjem dužine $\overline{AC}$ vidimo da imamo pravokutni trokut čija je duljina hipotenuze 1. Stoga, ako promatramo kosinus kuta α s vrhom u točki A, vidimo da je jednak $\frac{\cos\theta}{1}$. Dakle, $\cos\alpha = \cos\theta$. Sada, budući da smo konstruirali taj trokut, možemo konstruirati sukladan trokut koji dobivamo osnom simetrijom trokuta $\triangle ABC$ s obzirom na stranicu $\overline{AB}$. Slijedi da je kut α ili kut dobiven dodavanjem kuta α na kut između dvije hipotenuze jednak θ. Stoga je θ konstruktibilan.

$\square$

1.3 Trisektibilni kutovi

Definicija 1.3.1. *Kut θ je trisektibilan ako je kut $\frac{\theta}{3}$ konstruktibilan.*

Napomena 1.3.2. *Uočimo da ako je $\frac{\theta}{3}$ konstruktibilan, onda je i θ konstruktibilan. Npr. kut $\frac{\pi}{3}$, odnosno 60° je konstruktibilan, ali kut $\frac{\pi}{9}$, odnosno 20° nije konstruktibilan. Kut $\frac{\pi}{4}$ (45°) je konstruktibilan, a i trisektibilan jer je $\frac{\pi}{12}$ (tj. 15°) konstruktibilan.*

Budući da smo u ovom radu zainteresirani za trokute s cjelobrojnim stranicama, iz kosinusovog poučka koji kaže da je $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, uočavamo da će nas zanimati samo unutarnji kutovi koji rezultiraju racionalnim vrijednostima kosinusa. Imajući to na umu dolazimo do sljedećeg važnog teorema.

Teorem 1.3.3. *Neka je kut θ takav da je $\cos\theta$ racionalan broj. Kut θ je trisektibilan ako i samo ako postoji racionalan broj $t \in \langle -1, 1\rangle$ takav da je $\cos\theta = 4t^3 - 3t$.*

Dokaz.
Neka je kut θ takav da je $\cos\theta$ racionalan broj. Po prethodnim teoremima slijedi da je θ konstruktibilan kut. Formulu za kosinus trostrukog kuta $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ možemo zapisati kao $\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$. Uočavamo da je $\cos\frac{\theta}{3}$ korijen kubnog polinoma $0 = 4x^3 - 3x - \cos\theta$.

Po teoremima 1.1.11 i 1.2.1 dobivamo sljedeći niz ekvivalencija:
Kut θ je trisektibilan

$\Leftrightarrow$ kut $\frac{\theta}{3}$ je konstruktibilan

$\Leftrightarrow$ $\cos\frac{\theta}{3}$ je konstruktibilan broj

$\Leftrightarrow$ polinom $4x^3 - 3x - \cos\theta$ ima racionalan korijen

$\Leftrightarrow$ postoji racionalan broj $t \in \langle -1, 1\rangle$ takav da je $\cos\theta = 4t^3 - 3t$

Označimo taj racionalni korijen s t i pokažimo da vrijedi $t \in [-1, 1]$.
Kako je $4t^3 - 3t = \cos\theta$, vrijedi $-1 \leq 4t^3 - 3t \leq 1$.

Za $|t| \geq 1$ imamo $4t^2 - 3 \geq 1$ pa je i $|t(4t^2 - 3)| \geq 1$.
Zbog $4t^3 - 3t = \cos\theta$ mora vrijediti $|t(4t^2 - 3)| \leq 1$, dakle nužno je da je $|t| \leq 1$.

Činjenica da t možemo ograničiti na interval $\langle -1, 1\rangle$ proizlazi iz sljedećeg:
Za funkciju $f(x) = 4x^3 - 3x - \cos\theta$ vrijedi

$f(-1) = -4 + 3 - \cos\theta = -1 - \cos\theta = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \cos\theta = f\left(\frac{1}{2}\right)$ i
$f(1) = 4 - 3 - \cos\theta = 1 - \cos\theta = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \cos\theta = f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Stoga, radije umjesto da domenu $f(x)$ zapisujemo kao $[-1, 1]$, možemo samo zapisati $\langle -1, 1\rangle$.

Također,
$\cos\theta = 1$ za $\theta = 0$ ili 2π
$\cos\theta = -1$ za $\theta = \pi$,
a ti slučajevi su trivijalni pa ih ne trebamo posebno razmatrati.

□

Za naš rad bit će koristan sljedeći teorem koji povezuje trisektibilnost dvaju unutarnjih kutova i treći unutarnji kut u trokutu.

Teorem 1.3.4. *Ako su dva kuta u trokutu trisektibilna, onda je i treći kut trisektibilan.*

Dokaz.
Neka su α, β i γ kutovi trokuta te neka su α i β trisektibilni. Znamo da je $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ = \pi$ i stoga je $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Budući da je $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, po teoremu 1.1.2 slijedi da je $\cos\frac{\pi}{3}$

konstruktibilan broj te je po teoremu 1.2.1 $\frac{\pi}{3}$ konstruktibilan kut. S obzirom da su α i β trisektibilni, po teoremu 1.3.3 i njegovim ekvivalencijama slijedi da su $\frac{\alpha}{3}$ i $\frac{\beta}{3}$ također konstruktibilni. Budući da je $\frac{\gamma}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3}$, po teoremima 1.1.3 – 1.2.1 zaključujemo da je $\frac{\gamma}{3}$ konstruktibilan kut. Konačno, po teoremu 1.3.3 zaključujemo da je i kut γ trisektibilan.

□

Također, možemo izvesti sličan rezultat za kut θ i njegov suplementarni kut.

Teorem 1.3.5. *Kut θ je trisektibilan ako i samo ako je njegov suplementarni kut trisektibilan.*

Dokaz.
$\Rightarrow$ Neka je θ trisektibilan kut. Po teoremu 1.3.3 i njegovim ekvivalencijama slijedi da je $\frac{\theta}{3}$ konstruktibilan kut. Budući da je $\frac{\pi}{3}$ konstruktibilan kut (vidi dokaz prethodnog teorema), slijedi da je razlika $\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}$ također konstruktibilna. Iz konstruktibilnosti razlike $\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}$, po teoremu 1.3.3 i njegovim ekvivalencijama slijedi da je kut $\pi - \theta$ trisektibilan.

$\Leftarrow$ Obrnuti smjer očito vrijedi zbog $\pi - (\pi - \theta) = \theta$.

□

Ovo nas dovodi do mogućnosti sažimanja jednog dijela teorema 1.3.3.

Teorem 1.3.6. *Kut θ je trisektibilan ako $|\cos\theta| = |4t^3 - 3t|$ za neki racionalan broj $t \in \langle 0, 1\rangle$.*

Dokaz.
Uočimo da se funkcija $|\cos\theta|$ može zapisati po dijelovima kao

$$|\cos\theta| = \begin{cases} \cos\theta & : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos(\pi - \theta) & : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Iz prethodnog teorema kojim smo pokazali da je θ trisektibilan ako i samo ako je $\pi - \theta$ trisektibilan, slijedi da je $|\cos\theta|$ trisektibilan ako postoji racionalan broj $t \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $|\cos\theta| = |4t^3 - 3t|$.

□

Kako bismo sastavili popis konstruktibilnih vrijednosti kosinusa, uveli smo racionalnu vrijednost $\frac{y}{z}$ gdje su y i z relativno prosti brojevi takvi da je $1 \leq y < z$. Slijedi da racionalne vrijednosti kosinusa možemo opisati u tri različita slučaja:

1. z je neparan,
2. z je paran, $z = 2w$ pri čemu je w neparan,
3. z je paran, $z = 2w$ pri čemu je w paran.

Analizom ova tri slučaja dolazimo do toga da možemo opisati trisektibilne kosinuse na način kako slijedi.

Teorem 1.3.7. *Kut θ je trisektibilan ako i samo ako $\cos\theta = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi te poprimaju jedan od sljedećih oblika:*

1. $m = y\left|4y^2 - 3z^2\right|, n = z^3$, *$z$ je neparan,* $M(y,z) = 1$ *i* $1 \leq y < z$
2. $m = \frac{1}{2}y\left|y^2 - 3w^2\right|, n = w^3$, *$w$ i y su neparni,* $M(y,w) = 1$ *i* $1 \leq y < 2w$
3. $m = y\left|y^2 - 3w^2\right|, n = 2w^3$, *$w$ je paran,* $M(y,w) = 1$ *i* $1 \leq y < 2w$.

Dokaz.
Uvrštavanjem $\frac{y}{z}$ umjesto t u $|\cos\theta| = |4t^3 - 3t|$, dobivamo

$$|\cos\theta| = \left|4\left(\frac{y}{z}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{z}\right)\right| = \frac{y|4y^2 - 3z^2|}{z^3}.$$

Svaki od triju slučajeva ispitat ćemo pojedinačno.

1. Budući da su z i y relativno prosti, tj. $M(z,y) = 1$, zaključujemo da je $M(z^3,y) = 1$. Kada bi $M(z^3,y)$ bila veća od 1, tada bi i $M(z,y)$ bila veća od 1, što je nemoguće jer su z i y relativno prosti. Sada još trebamo provjeriti je li z relativno prost s $4y^2 - 3z^2$. Iz činjenice da su z i y relativno prosti, proizlazi da je $M(z^3,y^2) = 1$. Nadalje, $M(z^3,4) = 1$ jer je z neparan pa je i z^3 neparan. Stoga, $M(z^3,4y^2) = 1$. Iz toga slijedi zaključak da je $M(z^3, 4y^2 - 3z^2) = 1$.

Dakle, u slučaju kada je z neparan, $M(y,z) = 1$ i $1 \leq y < z$

$$m = y\left|4y^2 - 3z^2\right|,\ n = z^3,\ z \text{ neparan},\ M(y,z) = 1 \text{ i } 1 \leq y < z.$$

2. Neka je z paran, a w neparan takvi da je $z = 2w$. Tada imamo:

$$\frac{y|4y^2 - 3z^2|}{z^3} = \frac{y|4y^2 - 12w^2|}{8w^3} = \frac{y|y^2 - 3w^2|}{2w^3}.$$

Budući da su z i y relativno prosti, tj. $M(z,y) = 1$ i $z = 2w$, slijedi da je $M(2w,y) = 1$. Zaključujemo da je y neparan, inače bi $M(2w,y)$ bila barem 2. Nadalje, zaključujemo da je $M(w,y) = 1$ te da je $M(2,y) = 1$. Stoga slijedi, $M(w,y^2) = 1$ te $M(w^3,y^2) = 1$. Konačno, $M(w^3, y^2 - 3w^2) = 1$.

Dakle, u slučaju kada je z paran i w neparan broj takvi da je $z = 2w$, $M(y,z) = 1$ i $1 \leq y < z$,

$$m = \frac{1}{2}y\left|y^2 - 3w^2\right|,\ n = w^3,\ w \text{ i } y \text{ su neparni},\ M(y,w) = 1 \text{ i } 1 \leq y < 2w.$$

3. Neka su z i w parni brojevi takvi da je $z = 2w$. Tada imamo:

$$\frac{y|4y^2 - 3z^2|}{z^3} = \frac{y|4y^2 - 12w^2|}{8w^3} = \frac{y|y^2 - 3w^2|}{2w^3}.$$

Budući da su z i y relativno prosti, tj. $M(z, y) = 1$ i $z = 2w$, slijedi da je $M(2w, y) = 1$. Nadalje, zaključujemo da $M(w, y) = 1$ i stoga je $M(2w^3, y) = 1$ i $M(2w^3, y^2) = 1$. Konačno, brojnik i nazivnik ovog razlomka su relativno prosti brojevi, odnosno $M(2w^3, y^2 - 3w^2) = 1$.
Dakle, u slučaju kada su z i w parni brojevi takvi da vrijedi $z = 2w$, $M(y, z) = 1$ i $1 \leq y < z$,

$$m = y\left|y^2 - 3w^2\right|, \; n = 2w^3, \; w \text{ je paran, } \; M(y, w) = 1 \text{ i } 1 \leq y < 2w.$$

□

Uočimo da je nazivnik n ili neparan kub ili dvostruki paran kub. Tako je moguće navesti sve moguće pozitivne racionalne vrijednosti za $|\cos\theta|$ kad je θ trisektibilan. Navodimo prvih tridesetak takvih vrijednosti, u poretku s rastućim nazivnikom do uključeno nazivnik $n = 2 \cdot 6^3$:

$$\begin{gathered}
1, \\
\frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \\
\frac{5}{27}, \frac{13}{27}, \frac{22}{27}, \frac{23}{27}, \\
\frac{27}{125}, \frac{37}{125}, \frac{44}{125}, \frac{71}{125}, \frac{91}{125}, \frac{99}{125}, \frac{117}{125}, \frac{118}{125}, \\
\frac{7}{128}, \frac{47}{128}, \frac{115}{128}, \frac{117}{128}, \\
\frac{18}{343}, \frac{73}{343}, \frac{143}{343}, \frac{207}{343}, \frac{235}{343}, \frac{262}{343}, \frac{297}{343}, \frac{305}{343}, \frac{332}{343}, \frac{333}{343}, \\
\frac{107}{432}, \frac{143}{432}, \frac{413}{432}, \frac{415}{432}, \ldots
\end{gathered}$$

Kako bismo pronašli trokut s cjelobrojnim stranicama (a, b, c) s tri trisektibilna kuta α, β, γ, moramo odabrati stranice a, b i c tako da se sva tri broja $|\cos\alpha|$, $|\cos\beta|$ i $|\cos\gamma|$ pojavljuju negdje u proširenom popisu mogućih vrijednosti (zajedno s vrijednošću 0, ako je trokut pravokutni).

Imajući, za naše potrebe, dostatno iscrpnu teoriju trisektibilnosti, krećemo na glavni dio ovog rada.

Poglavlje 2

Trokuti s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima

Koristit ćemo pojam primitivni trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima kada su stranice trokuta relativno prosti brojevi.

2.1 Pravokutni trokut

Prirodno je postaviti pitanje postojanja pravokutnih trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima jer ih dosad nismo razmatrali. Kao nužan i dovoljan uvjet postojanja primitivnog pravokutnog trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima pokazuje se da hipotenuza takvog trokuta mora biti kub neparnog broja čiji su svi prim faktori oblika $4k + 1$. Prvi takav primjer koji se pojavljuje koristeći vrijednosti kosinusa na našem popisu je $(44, 117, 125)$, za koji je hipotenuza duljine 5^3. Dva sljedeća primjera su $(828, 2035, 2197)$ (za koji je hipotenuza duljine 13^3) i $(495, 4888, 4913)$ (za koji je hipotenuza duljine 17^3). U poglavlju 5 bavit ćemo se detaljnije pravokutnim trokutima na temelju članka [3]. Potraga za trokutima s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima bez pravog kuta bila je motivacija za rezultate prikazane u ovom radu.

2.2 Jednakokračni trokut

Budući da je kut od $60°$ tipičan primjer kuta koji nije trisektibilan, znamo da ne postoji jednakostraničan trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima. Nadalje, $\sqrt{2}$ je iracionalan pa ne postoje niti trokuti s cjelobrojnim stranicama koji su jednakokračni pravokutni. S obzirom na prethodno navedeni popis vrijednosti kosinusa, možemo lako pronaći primitivne trokute s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima koji su jednakokračni. Ako je $\frac{m}{n}$ racionalan broj s našeg popisa (pri čemu je $M(m, n) = 1$), tada je trokut $(n, n, 2m)$ trokut s cjelobrojnim stranicama za koji su kutovi uz osnovicu trisektibilni, a time taj trokut ima tri trisektibilna kuta. Ako je n neparan, stranice n i $2m$ nemaju zajedničkih faktora, a ako je n paran, možemo izlučiti 2 (i samo 2) iz svakog člana i dobiti trokut $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, m\right)$ čije stranice nemaju zajedničkih faktora. Na primjer,

$$\frac{9}{16} \longrightarrow (8, 8, 9), \qquad \frac{11}{16} \longrightarrow (8, 8, 11), \qquad \frac{5}{27} \longrightarrow (27, 27, 10), \qquad \frac{13}{27} \longrightarrow (27, 27, 26),$$

i tako dalje. Pogled na gore navedeni popis vrijednosti kosinusa otkriva da je jednakokračni trokut ove vrste s najmanjim opsegom $(8, 8, 9)$. Govoreći o našim općim formulama za m i n, vidimo da dvije jednake stranice primitivnog jednakokračnog trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima moraju biti potpuni kubovi.

Nakon što smo vidjeli primjere pravokutnog i jednakokračnog trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima, ostaje nam pitanje možemo li pronaći raznostraničan trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima koji nema pravi kut. Na prvi pogled, može se činiti malo vjerojatno da poučak o kosinusima može dati dozvoljene vrijednosti kosinusa za svaki od tri kuta, ali kao što ćemo vidjeti, takvi trokuti postoje.

U sljedećem dijelu predstavljamo jednostavan pristup za pronalaženje nekih od njih, a kasnije ćemo razmotriti opći pristup.

2.3 Jednostavan pristup za pronalaženje trokuta

U ovom dijelu, razmotrit ćemo trokute s kutovima θ i 2θ i trokute s kutovima $\pi - \theta$ i $\pi - 2\theta$. Neka je θ trisektibilan kut takav da je $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ i $\cos\theta = \frac{m}{n}$ gdje su m i n relativno prosti pozitivni cijeli brojevi. Razmotrimo trokut s kutovima θ, 2θ i $\pi - 3\theta$. Uz malo razmišljanja, vidimo da takav trokut može biti konstruiran i da su sva tri njegova kuta trisektibilna. Osim toga, identiteti za kosinus dvostrukog ili trostrukog kuta otkrivaju da je kosinus svakog od tih kutova racionalan broj. Budući da je $\cos\theta$ racionalan, kut θ ne može poprimiti nijednu od vrijednosti $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{5}$ ili $\frac{\pi}{4}$. Slijedi da odgovarajući trokut nije ni pravokutan ni jednakokračan. Označimo li s a, b, c stranice nasuprot kutova θ, 2θ, $\pi - 3\theta$, poučak o sinusima pokazuje da

$$\frac{\sin\theta}{a} = \frac{\sin 2\theta}{b} = \frac{\sin(\pi - 3\theta)}{c} = \frac{\sin 3\theta}{c}.$$

Primijenimo li da je $\cos\theta = \frac{m}{n}$ i uvrstimo li da je $a = n^2$, što je prikladan izbor kako bi se dobile cjelobrojne vrijednost b i c, dobivamo

$$b = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \cdot a = 2a\cos\theta = 2mn;$$
$$c = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} \cdot a = \frac{\sin\theta\cos 2\theta + \sin 2\theta\cos\theta}{\sin\theta} \cdot a = \left(2\cos^2\theta - 1 + 2\cos^2\theta\right)a = 4m^2 - n^2.$$

Uočimo da je c pozitivan jer uvjeti na θ povlače da je $\frac{m}{n} > \frac{1}{2}$. Nije teško provjeriti da je $M(a, c) = 1$ kada je n neparan i $M(a, c) = 4$ kada je n paran. Slijedi da je $(n^2, 2mn, 4m^2-n^2)$ primitivni trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima kada je n neparan i $\left(\frac{n^2}{4}, \frac{mn}{2}, \frac{4m^2-n^2}{4}\right)$ je primitivni trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima kada je n paran.

Sada pretpostavimo da je θ trisektibilan te zadovoljava $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ i $\cos\theta = \frac{m}{n}$ gdje su m i n relativno prosti pozitivni cijeli brojevi. Razmotrimo trokut s kutovima $\pi-\theta$, $\pi-2\theta$ i $3\theta-\pi$. Kao i prije, takav trokut može biti konstruiran, sva tri kuta su mu trisektibilna i kosinus svakog kuta je racionalan broj. Budući da odgovarajući trokut ima tupi kut, to očito nije pravokutan trokut. Nadalje, $\cos\frac{2\pi}{5}$ nije racionalan pa kut θ ne može poprimiti vrijednost $\frac{2\pi}{5}$ što nam pokazuje da odgovarajući trokut nije jednakokračan. Nastavljajući kao gore, pronalazimo da je oblik trokuta sada $(n^2, 2mn, n^2 - 4m^2)$, odnosno po potrebi primijenimo faktor $\frac{1}{4}$ kako bismo dobili primitivni trokut. Tako smo došli do sljedećeg rezultata.

Teorem 2.3.1. *Ako su m i n relativno prosti pozitivni cijeli brojevi i $\frac{m}{n}$ je kosinus trisektibilnog kuta, onda $(n^2, 2mn, |4m^2 - n^2|)$ je primitivni trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima kada je n neparan, a $\left(\frac{n^2}{4}, \frac{mn}{2}, \frac{|4m^2-n^2|}{4}\right)$ je primitivni trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima kada je n paran broj. Svaki od tih trokuta je raznostraničan i nema pravi kut.*

Lako je provjeriti da je stranica n^2 ili $\frac{n^2}{4}$ uvijek šesta potencija nekog cijelog broja. Za ilustraciju te formule, uočimo

$$\frac{9}{16} \longrightarrow (64, 72, 17), \qquad \frac{11}{16} \longrightarrow (64, 88, 57),$$
$$\frac{5}{27} \longrightarrow (729, 270, 629), \qquad \frac{23}{27} \longrightarrow (729, 1242, 1387).$$

Može se pokazati da različiti kutovi θ i ϕ određuju različite (nesukladne) trokute. Postoji beskonačno mnogo različitih primjera tih vrsta trokuta.

Ova metoda može se proširiti na druge kombinacije kutova. Na primjer, možemo razmotriti trokut s kutovima θ, 3θ, $\pi - 4\theta$ pod pretpostavkom da je $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ i trokute s kutovima θ, 4θ, $\pi - 5\theta$ i 2θ, 3θ, $\pi - 5\theta$, pod pretpostavkom da $0 < \theta < \frac{\pi}{5}$. Budući da identiteti za kosinus višestrukog kuta postaju zapetljaniji s višestrukim povećanjem, formule za stranice trokuta također postaju sve kompliciranije.

Poglavlje 3

Reziduali

Neka su θ i ϕ dva šiljasta kuta u trokutu s cjelobrojnim stanicama te neka su kosinusi tih kutova racionalni brojevi. Budući da su θ i ϕ šiljasti, vrijedi $0 < \theta < \phi < \frac{\pi}{2}$. Zapišemo li $\cos(\theta) = \frac{m}{n}$ i $\cos(\phi) = \frac{p}{q}$, tada možemo izračunati kosinus trećeg kuta u trokutu na način:

$$\cos(\pi - (\theta + \phi)) = -\cos(\theta + \phi) = \sin\theta \sin\phi - \cos\theta \cos\phi = \frac{\sqrt{(n^2-m^2)\cdot(q^2-p^2)} - mp}{nq}.$$

Kako bi ta vrijednost kosinusa bila racionalna, $\sqrt{(n^2 - m^2) \cdot (q^2 - p^2)}$ mora biti racionalan te stoga $(n^2-m^2)\cdot(q^2-p^2)$ mora biti potpuni kvadrat. Prema osnovnom teoremu aritmetike, svaka od ovih razlika može se zapisati u obliku umnoška potpunog kvadrata i kvadratno slobodnog broja. Zapisujemo to kao $n^2 - m^2 = j^2 r \quad \text{i} \quad q^2 - p^2 = k^2 s$ gdje su r i s kvadratno slobodni. Slijedi da će $(n^2 - m^2) \cdot (q^2 - p^2)$ biti potpuni kvadrat kada je $r = s$.

Ovaj rezultat je vrlo važan i o njemu ovise naši trokuti s cjelobrojnim stranicama, a mi ćemo stoga preciznije definirati i uvesti poseban naziv za takve kvadratno slobodne brojeve pridružene određenoj racionalnoj vrijednosti kosinusa.

Definicija 3.0.1. *Neka je $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ kut čiji je kosinus racionalan, pišemo $\cos\theta = \frac{m}{n}$, gdje su m i n cijeli brojevi. Izrazimo broj $n^2 - m^2$ kao $j^2 r$ gdje su j i r pozitivni cijeli brojevi i r je kvadratno slobodan broj. Broj r nazivamo rezidual kuta θ.*

Nakon definicije reziduala, možemo u sažetom obliku iskazati prethodno dokazanu tvrdnju.

Teorem 3.0.2. *Ako su θ i ϕ dva kuta u trokutu s cjelobrojnim stranicama, tada θ i ϕ imaju jednaki rezidual r.*

Sljedećih nekoliko lema dokazat će nam da trokut (a stoga i njegovi unutarnji kutovi) mogu biti karakterizirani jednim rezidualom.

Lema 3.0.3. *Ako je* $\cos\theta$ *racionalan (gdje je* $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$*) i rezidual od* θ *je* r*, onda je* $\sin\theta = w\sqrt{r}$*, gdje je* w *pozitivan racionalan broj. Obrnuto, ako je* $\cos\theta$ *racionalan broj i* $\sin\theta = w\sqrt{r}$ *(gdje je* r *kvadratno slobodan cijeli broj) za neki pozitivan racionalan broj* w*, onda je rezidual kuta* θ *jednak* r*.*

Dokaz.
$\Rightarrow$ Neka $\cos\theta = \frac{m}{n}$ i rezidual od θ neka je r. Slijedi da je $\cos^2\theta = \frac{m^2}{n^2} = 1 - \sin^2\theta$ i stoga $\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-m^2}}{n}$. Po prethodnoj definiciji znamo da postoji cijeli broj j takav da je $n^2 - m^2 = j^2 r$. Slijedi da je $\sin\theta = \frac{j}{n}\sqrt{r} = w\sqrt{r}$, gdje je w racionalan broj jednak $\frac{j}{n}$.

$\Leftarrow$ Neka je $\sin\theta = w\sqrt{r}$. Slijedi da je $\sin^2\theta = w^2 r = 1 - \cos^2\theta$, odnosno $\cos^2\theta = 1 - w^2 r$. Budući da je $\cos\theta$ racionalan broj, za relativno proste cijele brojeve m i n možemo zapisati $\cos\theta = \frac{m}{n}$. Iz toga slijedi da je $1 - w^2 r = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $n^2 - n^2 w^2 r = m^2$. Konačno, $n^2 - m^2 = (nw)^2 r$. Prema osnovnom teoremu aritmetike rastav broja na prim faktore je jedinstven i stoga je zapis u obliku produkta kvadratno slobodnog broja i potpunog kvadrata jedinstven i zaključujemo da r mora biti rezidual kuta θ.

□

Lema 3.0.4. *Neka su* θ *i* ϕ *kutovi s racionalnim kosinusima i zajedničkim rezidualom* r*. Tada kut* $\pi - \theta - \phi$ *ima rezidual* r*.*

Dokaz.
Uočimo da je kut $\pi - \theta - \phi$ iz intervala $\langle 0, \pi\rangle$. Iz trigonometrijskih identiteta slijedi da $\sin(\pi - \theta - \phi) = \sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$. Budući da su θ i ϕ kutovi s racionalnim kosinusima i zajedničkim rezidualom r, postoje m, n, p, q takvi da je $\cos\theta = \frac{m}{n}$ i $\cos\phi = \frac{p}{q}$. Po prethodnoj lemi znamo da postoje racionalni brojevi w_1 i w_2 takvi da je $\sin\theta = w_1\sqrt{r}$ i $\sin\phi = w_2\sqrt{r}$. Nadalje, $\sin(\pi - \theta - \phi)$ možemo zapisati kao

$$\sin(\pi - \theta - \phi) = w_1\sqrt{r}\cdot\frac{p}{q} + w_2\sqrt{r}\cdot\frac{m}{n} = \frac{w_1 pn\sqrt{r} + w_2 mq\sqrt{r}}{qn} = \frac{npw_1 + mqw_2}{nq}\sqrt{r}.$$

Stoga je po prethodnoj lemi rezidual kuta $\pi - \theta - \phi$ jednak r.

□

Teorem 3.0.5. *Ako su* θ*,* ϕ *i* γ *tri kuta u trokutu s cjelobrojnim stranicama onda oni imaju isti rezidual.*

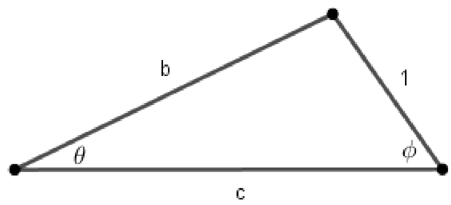
Dokaz.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su θ i ϕ šiljasti kutovi. Budući da su duljine stranica trokuta cijeli brojevi, slijedi da kosinusi svih triju kutova moraju biti racionalnih vrijednosti. Po teoremu 3.0.2 slijedi da θ i ϕ imaju isti rezidual r. Budući da je $\gamma = \pi - \theta - \phi$, po prethodnoj lemi slijedi da γ ima isti rezidual r kao i θ i ϕ. □

Nakon što smo otkrili da se naši trokuti mogu prikazati pomoću jedinstvenog reziduala, zanima nas obrnuti smjer. Ako su nam dana dva kuta s racionalnim kosinusima i zajedničkim rezidualom, postoji li trokut koji ih sadrži?

Teorem 3.0.6. *Neka su θ i ϕ kutovi s racionalnim kosinusima takvi da je $0 < \theta < \phi < \frac{\pi}{2}$. Ako θ i ϕ imaju isti rezidual, onda postoji trokut s cjelobrojnim stranicama koji sadrži kutove θ i ϕ.*

Dokaz.
Neka su θ i ϕ kutovi s racionalnim kosinusima takvi da je $0 < \theta < \phi < \frac{\pi}{2}$ i neka imaju isti rezidual. Tada možemo zapisati $\cos\theta = \frac{m}{n}$, $n^2 - m^2 = j^2 r$, $\cos\phi = \frac{p}{q}$ i $q^2 - p^2 = k^2 r$ gdje su svi cijeli brojevi pozitivni i r je kvadratno slobodan.

Razmotrimo trokut s kutovima θ i ϕ i sa stranicama kao što je prikazano na sljedećoj slici.



Slika 3.1: Dokaz teorema 3.0.6

Koristeći poučak o sinusima dobivamo:

$$\frac{\sin\theta}{1} = \frac{\sin\phi}{b} = \frac{\sin(\theta+\phi)}{c}.$$

Iz toga slijedi da je

$$b = \frac{\sin\phi}{\sin\theta} = \frac{n\sqrt{q^2-p^2}}{q\sqrt{n^2-m^2}} = \frac{nk}{qj};$$

$$c = \frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin\theta} = \frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}}\left(\frac{m\sqrt{q^2-p^2}}{nq} + \frac{p\sqrt{n^2-m^2}}{nq}\right) = \frac{mk+pj}{qj}.$$

Dakle, trokut $(qj, nk, mk+pj)$ ima cjelobrojne stranice i sadrži kutove θ i ϕ.

□

Prethodna dva teorema zajedno nam daju završni teorem.

Teorem 3.0.7. *Šiljasti kutovi θ i ϕ s racionalnim kosinusima imaju isti rezidual ako i samo ako postoji trokut s cjelobrojnim stranicama koji sadrži ta dva kuta.*

Poglavlje 4

Opća formula za trokute s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima

Kombinirajući teorem 3.0.6 i naše poznavanje vrijednosti kosinusa potrebnih za trisektibilnost kutova, dobivamo sljedeće rezultate. Ovaj teorem pruža opći odgovor na pitanje koje se postavlja na početku.

Teorem 4.0.1. *Neka su θ i ϕ trisektibilni kutovi s racionalnim kosinusima takvi da $0 < \theta < \phi < \frac{\pi}{2}$. Pretpostavimo da θ i ϕ imaju jednaki r i zapišimo $\cos\theta = \frac{m}{n}$, $n^2 - m^2 = j^2 r$, $cos\phi = \frac{p}{q}$ i $q^2 - p^2 = k^2 r$, gdje su svi cijeli brojevi pozitivni. Onda je svaki od trokuta $(qj, nk, mk + pj)$ i $(qj, nk, mk - pj)$ trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima.*

Dokaz.
Formula $(qj, nk, mk + pj)$ je utvrđena u dokazu teorema 3.0.6. Uzimajući u obzir šiljaste kutove θ i $\phi - \theta$ i koristeći isti pristup, dobivamo formulu $(qj, nk, mk - pj)$. Uočimo da ovaj drugi trokut sadrži tupi kut.

□

Raspolažući spoznajom da kutovi θ i ϕ trebaju imati isti rezidual, vraćamo se na popis mogućih racionalnih vrijednosti kosinusa za trisektibilne kutove te računamo rezidual za svaki od njih. Nakon što smo pronašli dvije vrijednosti s istim rezidualom, možemo upotrijebiti formulu $(qj, nk, mk \pm pj)$ za dobivanje odgovarajućih kutova. Na taj način otkrivamo da kutovi čiji su kosinusi $\frac{5}{27}$ i $\frac{37}{125}$ oba imaju rezidual 11, a time dobivamo trokute

$$(972, 1000, 476) = 4 \cdot (243, 250, 119) \quad \text{i} \quad (972, 1000, 116) = 4 \cdot (243, 250, 29).$$

Sljedeće smo otkrili da kutovi čiji su kosinusi $\frac{9}{16}$ i $\frac{47}{128}$ oba imaju rezidual 7 i time dobivamo trokute

$$(640, 720, 640) = 80 \cdot (8, 9, 8) \quad \text{i} \quad (640, 720, 170) = 10 \cdot (64, 72, 17).$$

Također smo otkrili da vrijednosti kosinusa $\frac{44}{125}$ i $\frac{117}{125}$ doprinose potpunim kvadratima (rezidual je 1) i na taj način dobivamo trokute

$$(5500, 14625, 15625) = 125 \cdot (44, 117, 125) \quad \text{i} \quad (5500, 14625, 11753).$$

Trokut $(44, 117, 125)$ je pravokutni trokut koji je spomenut ranije. Tupokutan trokut $(5500, 14625, 11753)$ pokazuje da zajednički rezidual kutova može biti 1 čak i kada trokut nije pravokutan. Pogledamo li tih šest trokuta koje smo otkrili, uočavamo da ova metoda ponekad generira jednakokračne ili pravokutne trokute. Jedan od načina kako izbjeći takve trokute je započeti s dvije vrijednosti kosinusa koje imaju relativno proste nazivnike.

Kao što vidimo u ovim primjerima, katkad je potrebna primjena određenog faktora da bi se dobio primitivni trokut. Uz pretpostavku da je $0 < \theta < \phi < \frac{\pi}{2}$ i usvajanjem notacije iz teorema 4.0.1, pretpostavimo da je $M(m, n) = 1$, $M(p, q) = 1$ i $M(n, q) = 1$. Neka je $g = M(j, k)$ i pišemo $j = gj'$ i $k = gk'$. Tada je osnovni zadatak dokazati da svaka od formula $(qj', nk', mk' + pj')$ i $(qj', nk', mk' - pj')$ daje primitivni trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima.

Sada imamo dvije metode za pronalaženje trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima. Iako je vrlo malo vjerojatno da su jednake, jesmo li sigurni da su te dvije metode zapravo različite? Prva (i jednostavnija) metoda predstavljena u teoremu 2.3.1 rezultirala je trokutima čiji kutovi su racionalni višekratnici jedni drugih modulo π. Neka su θ, ϕ i ψ tri kuta u trokutu s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima. Ima li cijelih brojeva n, r i s takvih da je $\theta = n\pi + \frac{r}{s}\phi$ ili $\theta = n\pi + \frac{r}{s}\psi$? Prvu jednadžbu možemo zapisati u obliku $s\theta = ns\pi + r\phi$, a drugu

$$s\theta = ns\pi + r(\pi - \theta - \phi) \quad \text{ili} \quad (r + s)\theta = (ns + r)\pi - r\phi.$$

U svakom slučaju, možemo pronaći pozitivne cijele brojeve r i s takve da je $\cos(s\theta) = \pm\cos(r\phi)$.

Čebiševljevi polinomi T_k su korisni u ovoj fazi procesa.

Definicija 4.0.2. *Čebiševljevi polinomi prve vrste jedinstveni su polinomi koji zadovoljavaju*

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \arccos x), & |x| \leq 1 \\ \cosh(k \operatorname{arccosh} x), & x \geq 1 \\ (-1)^k \cosh(k \operatorname{arccosh}(-x)), & x \leq -1 \end{cases}$$

Jedno od brojnih svojstava ovih polinoma je činjenica da $\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$ za svaki pozitivan cijeli broj k pri čemu je $\cos(kx)$ realni dio de Moivreove formule[1].
Osim toga, polinom T_k ima stupanj k s vodećim koeficijentom 2^{k-1}. Ako pretpostavimo da je $\cos\theta = \frac{m}{n}$ i $\cos\phi = \frac{p}{q}$, gdje su n i q relativno prosti neparni brojevi i $M(m,n) = 1 = M(p,q)$, tada vidimo da

$$\cos(s\theta) = T_s(\cos\theta) = 2^{s-1}\left(\frac{m}{n}\right)^s + \ldots = \frac{2^{s-1}m^s + nX}{n^s},$$

$$\cos(r\theta) = T_r(\cos\theta) = 2^{r-1}\left(\frac{p}{q}\right)^r + \ldots = \frac{2^{r-1}p^r + qY}{q^r},$$

gdje su X i Y cijeli brojevi. Budući da su ova dva rezultata jednaka, vidimo da je

$$q^r\left(2^{s-1}m^s + nX\right) = \pm n^s\left(2^{r-1}p^r + qY\right)$$

što nam otkriva da jedan od neparnih prim brojeva koji dijeli q također mora dijeliti i $2^{r-1}p^r$, a to nas dovodi do kontradikcije. Slijedi da metoda teorema 4.0.1 generira trokute koji se ne pojavljuju metodom teorema 2.3.1.

Uz prethodni teorem, u mogućnosti smo generirati beskonačno mnogo trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutova. Međutim, dokazi o rezidualima tih kutova i njihovim trisekcijama su potrebni kao teorijska podloga za naše istraživanje. Ti teoremi i njihovi dokazi slijede ispod.

Lema 4.0.3. *Neka je θ kut s racionalnim vrijednostima kosinusa. Tada kut 3θ ima jednaki rezidual kao i kut θ.*

Dokaz.
Prema formuli za sinus trostrukog kuta slijedi da je

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta. \tag{4.1}$$

[1] $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

Po lemi 3.0.3 slijedi da ako je r rezidual kuta θ, tada postoji racionalan broj w takav da $\sin\theta = w\sqrt{r}$. Uvođenjem toga u (4.1) dobivamo

$$\sin 3\theta = 3w\sqrt{r} - 4w^3 r\sqrt{r} = \left(3w - 4w^3 r\right)\sqrt{r}.$$

Budući da su w i r racionalni brojevi, slijedi da je $3w - 4w^3 r$ racionalan broj i po lemi 3.0.3 kut 3θ ima rezidual r.

□

Za učinkovito dobivanje tih vrsta trokuta, trebamo bolju metodu od nasumičnog pretraživanja za pronalaženje zajedničkih reziduala. Podsjećamo da naš popis racionalnih vrijednosti kosinusa može biti generiran brojevima oblika $|4t^3 - 3t|$ gdje je t racionalan broj iz intervala $\langle -1, 1\rangle$. Kao što sljedeći teorem pokazuje, kutovi povezani s t i $|4t^3 - 3t|$ imaju isti rezidual jer su kutovi povezani s $4t^3 - 3t$ i $-(4t^3 - 3t)$ suplementarni.

Teorem 4.0.4. *Neka je t racionalan broj iz intervala $\langle -1, 1\rangle$. Ako su kutovi θ i ϕ iz intervala $\langle 0, \pi\rangle$ takvi da je $\cos\theta = t$ i $\cos\phi = 4t^3 - 3t$, onda θ i ϕ imaju isti rezidual.*

Dokaz.
Prema formuli za kosinus trostrukog kuta slijedi da je

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \tag{4.2}$$

Neka su θ i ϕ iz intervala $\langle 0, \pi\rangle$ takvi da je $\cos\theta = t$ i $\cos\phi = 4t^3 - 3t$. Uvođenjem toga u (4.2) dobivamo

$$\cos 3\theta = 4t^3 - 3t = \cos\phi.$$

Zaključujemo je kut 3θ jednak ili ϕ ili $2\pi + \phi$ ili $2\pi - \phi$. Budući da su vrijednosti kosinusa jednake, slijedi da ϕ mora imati isti rezidual kao 3θ. Po lemi 4.0.3 slijedi da θ i ϕ imaju isti rezidual.

□

Neka je r kvadratno slobodan broj i (kako bismo pojednostavili notaciju) neka je f definirano s $f(t) = 4t^3 - 3t$. S obzirom na dva pozitivna cijela broja x i y, racionalan broj $\frac{|x^2 - ry^2|}{x^2 + ry^2}$ leži u intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Neka je θ šiljasti kut za koji $\cos\theta$ ima tu vrijednost. Onda je lako provjeriti da je r rezidual od θ i po teoremima 1.3.3 i 4.0.4, šiljasti kut ϕ koji zadovoljava

$$\cos\phi = \left| f\left(\frac{x^2 - ry^2}{x^2 + ry^2}\right)\right|$$

je trisektibilan i ima rezidual r. Nas zanimaju brojevi koji se mogu izraziti u obliku $x^2 + ry^2$, za danu vrijednost r. Želimo li napraviti korak dalje, možemo se pitati koji se prim brojevi

p mogu izraziti na taj način. Poznato je da jednadžba $p = x^2 + ry^2$ ima beskonačan broj rješenja kada r ima bilo koju od vrijednosti 1, 2, 3 ili 7. Također, poznato je da su u svakom slučaju potrebni prim brojevi određenog oblika. Konkretno, teorija algebarskih cijelih brojeva ukazuje da se jednadžba može riješiti u sljedećim slučajevima:

$r = 1$ odgovara prim brojevima oblika $4k + 1$;
$r = 2$ odgovara prim brojevima oblika $8k + 1$ ili $8k + 3$;
$r = 3$ odgovara prim brojevima oblika $3k + 1$;
$r = 7$ odgovara neparnim prim brojevima oblika $7k + 1$, $7k + 2$ ili $7k + 4$.

Prvih nekoliko primjera svakog tipa su sljedeći.

$$\begin{array}{rrrr}
5 = 1^2 + 2^2 & 3 = 1^2 + 2 \cdot 1^2 & 7 = 2^2 + 3 \cdot 1^2 & 11 = 2^2 + 7 \cdot 1^2 \\
13 = 2^2 + 3^2 & 11 = 3^2 + 2 \cdot 1^2 & 13 = 1^2 + 3 \cdot 2^2 & 23 = 4^2 + 7 \cdot 1^2 \\
17 = 1^2 + 4^2 & 17 = 3^2 + 2 \cdot 2^2 & 19 = 4^2 + 3 \cdot 1^2 & 29 = 1^2 + 7 \cdot 2^2 \\
29 = 2^2 + 5^2 & 19 = 1^2 + 2 \cdot 3^2 & 31 = 2^2 + 3 \cdot 3^2 & 37 = 3^2 + 7 \cdot 2^2 \\
37 = 1^2 + 6^2 & 41 = 3^2 + 2 \cdot 4^2 & 37 = 5^2 + 3 \cdot 2^2 & 43 = 6^2 + 7 \cdot 1^2 \\
41 = 4^2 + 5^2 & 43 = 5^2 + 2 \cdot 3^2 & 43 = 4^2 + 3 \cdot 3^2 & 53 = 5^2 + 7 \cdot 2^2
\end{array}$$

Da bismo ilustrirali kako se te jednadžbe mogu koristiti za generiranje trokuta s cjelobrojnim stranicama, promatramo slučaj u kojem je $r = 2$. Pomoću izraza za 11 i 3 u drugom stupcu, dobivamo kutove θ i ϕ ($\theta < \phi$ kao što se koristi u teoremu 4.0.1) kako slijedi:

$$\cos\theta = \frac{m}{n} = \left| f\left(\frac{9-2}{9+2}\right) \right| = \frac{1169}{1331} \approx 0.8783$$

i

$$\cos\phi = \frac{p}{q} = \left| f\left(\frac{1-2}{1+2}\right) \right| = \frac{23}{27} \approx 0.8519.$$

Primjenom formula $(qj, nk, mk \pm pj)$ iz teorema 4.0.1, dobivamo dva trokuta $(1215, 1331, 2204)$ i $(1215, 1331, 134)$. Koristeći gore navedene jednadžbe, možemo dobiti mnogo više takvih trokuta za vrijednosti $r = 1, 2, 3$ ili 7. Također je zanimljivo istražiti što se događa za druge vrijednosti r, uključujući i vrijednosti r koje nisu prim brojevi. Npr. neka je $r = 57$, primijetimo da vrijednosti kosinusa $\frac{8}{11}$ i $\frac{28}{29}$ imaju rezidual 57. Vidimo da

$$f\left(\frac{8}{11}\right) = -\frac{856}{1331} \quad \text{i} \quad f\left(\frac{28}{29}\right) = \frac{17164}{24389}$$

i te vrijednosti dovode do trokuta $(22627, 24389, 31716)$ i $(22627, 24389, 2612)$.

Jesmo li sigurni da postoji trokut s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima u kojem je zajednički rezidual kutova r, za dani kvadratno slobodan cijeli broj r?
Za $r = 1$, znamo da postoji beskonačan broj različitih mogućnosti na temelju naših ranijih komentara o pravokutnim trokutima. Zapravo, koristeći šiljaste kutove tih pravokutnih trokuta i primjenom druge formule iz teorema 4.0.1 (koji daje trokut s tupim kutom) dobivamo beskonačan broj raznostraničnih trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima bez pravog kuta čiji je zajednički rezidual 1. Sljedeći teorem nam pokazuje da se taj rezultat proteže na sve druge vrijednosti od r. Pridjev „različit“ koji se koristi u iskazu teorema odnosi se na trokute koji nisu slični. Navedimo teorem bez dokaza koji daje odgovor na postavljeno pitanje.

Teorem 4.0.5. *Za svaki kvadratno slobodan cijeli broj r postoji beskonačan broj različitih raznostraničnih trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima za koje je zajednički rezidual kutova r.*

Napomenimo da se dokaz temelji na promatranju niza racionalnih brojeva $a_n = \frac{|4n^2-r|}{4n^2+r}$. Pokazuje se da je taj niz rastući te da se izborom kutova θ_n takvih da je $\cos(\theta_n) = f(a_n)$, uz $f(t) = 4t^3 - 3t$ može dobiti beskonačno mnogo trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima čiji je rezidual jednak r.

Poglavlje 5

Pitagorini trokuti s trisektibilnim kutovima

Kao što smo već u poglavlju 2 najavili, u ovom posljednjem poglavlju detaljnije ćemo se osvrnuti na pravokutne trokute s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima.

Budući da znamo da u svakom pravokutnom trokuti vrijedi Pitagorin poučak, dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 5.0.1. *Uređenu trojku prirodnih brojeva (a, b, c) zovemo Pitagorina trojka ako su a, b katete, a c hipotenuza nekog pravokutnog trokuta, tj. ako vrijedi*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ako su a, b, c relativno prosti, onda kažemo da je (a, b, c) primitivna Pitagorina trojka.

Definicija 5.0.2. *Pravokutni trokut sa stranicama a, b i c, pri čemu su a, b i c relativno prosti brojevi, nazivamo primitivni Pitagorin trokut.*

Lako se uoči da u svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojci c mora biti neparan broj te da a i b moraju biti različite parnosti, odnosno točno jedan od a ili b je neparan broj. Mi ćemo uzimati da je prvi broj u trojci paran.

Sve primitivne Pitagorine trojke zadovoljavaju sljedeće svojstvo (vidi [4]).

Teorem 5.0.3. *Sve primitivne Pitagorine trojke (a, b, c) u kojima je a paran, dane su formulama*

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2,$$

gdje je $m > n$ i m, n su relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti.

Kako bismo dokazali rezultat koji slijedi, koristit ćemo Gaussove cijele brojeve.

Gaussovim cijelim brojevima nazivaju se kompleksni brojevi kojima je i realni i imaginarni dio cijeli broj. Skup svih Gaussovih cijelih brojeva $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ obično se označava sa $\mathbb{Z}[i]$ i to je komutativni prsten s obzirom na operacije zbrajanja i množenja u polju $\mathbb{C}$. U tom prstenu invertibilni su za množenje samo brojevi 1, -1, i, $-i$. Također, $\mathbb{Z}[i]$ je integralna domena, dakle nema djelitelja nule.

Nadalje, prsten $\mathbb{Z}[i]$ je euklidska domena s obzirom na normu $N(a+bi) = a^2 + b^2$, što znači da u njemu vrijedi poopćenje svojstva o dijeljenju s ostatkom u prstenu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Naime, za $u, v \in \mathbb{Z}[i]$, pri čemu je v različit od 0, postoje $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ takvi da je $u = vq + r$, gdje je $N(r) < N(v)$. Ovdje q i r općenito nisu jednoznačno određeni, kao kod dijeljenja cijelih brojeva, ali se jednoznačnost može postići uz neke dodatne pretpostavke.

Važno je svojstvo prstena $\mathbb{Z}[i]$ da je to faktorijalni prsten ili domena s jednoznačnom faktorizacijom u ireducibilne (proste) faktore, to jest da vrijedi analogon osnovnog teorema aritmetike za cijele brojeve. Općenito, element p prstena R naziva se prostim ako p nije 0 i nije invertibilan element, a vrijedi da čim p dijeli umnožak uv elementa u, v iz R onda p dijeli barem jedan od tih elemenata.

Primjerice, cijeli broj 2 je prost u prstenu $\mathbb{Z}$, ali ne i u prstenu $\mathbb{Z}[i]$ jer vrijedi $(1+i)(1-i) = 2$, a niti jedan od brojeva $1 + i$, $1 - i$ nije djeljiv s 2, to jest ne može se napisati u obliku $2w$ za neki $w \in \mathbb{Z}[i]$.

U faktorijalnom prstenu vrijedi teorem:

Teorem 5.0.4. *Svaki element različit od 0 koji nije invertibilan može se napisati kao umnožak prostih elemenata i jednog invertibilnog elementa.*

Posebno, za prsten $\mathbb{Z}[i]$ vrijede sljedeća svojstva:

Pozitivni cijeli broj p je prosti element u tom prstenu ako i samo ako je p prim broj oblika $p \equiv 3(mod 4)$.
Općenito, Gaussov cijeli broj $z = a+bi$ je prosti element prstena $\mathbb{Z}[i]$ ako i samo ako vrijedi jedno od sljedećeg:

$N(z) = a^2+b^2$ je prim broj koji pri dijeljenju s 4 daje ostatak 3 ili je z umnožak invertibilnog elementa (dakle, jednog od 1, -1, i, $-i$) s prim brojem p takvim da je $p \equiv 3(mod 4)$.
Pojedinosti se mogu naći u [2].

Jednakosti kao što su

$$37 = (1 + 6i)(1 - 6i), \quad (1 + 6i)^2 = -35 + 12i, \quad 12^2 + 35^2 = 37^2$$

pokazuju vezu između Gaussovih cijelih brojeva i primitivnih Pitagorinih trojki.

Teorem 5.0.5. *Ako je (A, B, C^3) primitivna Pitagorina trojka, onda postoji primitivna Pitagorina trojka (a, b, C) takva da je $A = |a^3 - 3ab^2|$ i $B = |b^3 - 3a^2b|$.*

Dokaz.
Po svojstvima Pitagorine trojke, postoje relativno prosti pozitivni cijeli brojevi s i t takvi da je $s < t$, $t - s$ je neparan i $A = 2st$, $B = t^2 - s^2$, $C^3 = t^2 + s^2$. Slijedi da je

$$C^3 = (t + si)(s - si) \quad \text{i} \quad (t + si)^2 = B + Ai.$$

Nije previše teško pokazati da su Gaussovi cijeli brojevi $t + si$ i $t - si$ relativno prosti (bitna nam je činjenica da je $t - s$ neparan jer 2 nije Gaussov prim broj) i svaki od ta dva broja mora biti potpuni kub. Neka je $v + ui$ Gaussov cijeli broj takav da je $(v + ui)^3 = t + si$ te neka je $a = |2uv|$ i $b = |v^2 - u^2|$. Tvrdimo da a i b imaju željena svojstva. Iz

$$\left(a^2 + b^2\right)^3 = \left((v + ui)^2 (v - ui)^2\right)^3 = ((t + si)(t - si))^2 = C^6,$$

vidimo da je (a, b, C) Pitagorina trojka. Osim toga, iz sljedećeg izraza

$$\begin{aligned}
B + Ai &= (t + si)^2 = \left((v + ui)^2\right)^3 \\
&= \left(\left(v^2 - u^2\right) + 2uvi\right)^3 \\
&= \left(\left(v^2 - u^2\right)^3 - 3\left(v^2 - u^2\right)(2uv)^2\right) + \left(3(v^2 - u^2)^2 (2uv) - (2uv)^3\right) i \\
&= \left(v^2 - u^2\right)\left(b^2 - 3a^2\right) + 2uv\left(3b^2 - a^2\right) i
\end{aligned}$$

dobivamo da je $B = |b(b^2 - 3a^2)|$ i $A = |a(a^2 - 3b^2)|$. Konačno, činjenica da su A i B relativno prosti povlači da su i a i b relativno prosti.

□

Sada smo u mogućnosti dokazati glavni teorem ovog poglavlja. Spomenuli smo već da ako je jedan šiljasti kut u pravokutnom trokutu trisektibilan, tada je i preostali šiljasti kut također trisektibilan. Kako bismo to pokazali, neka su α i β dva šiljasta kuta u pravokutnom trokutu te neka je $\frac{\alpha}{3}$ konstruktibilan. Budući da je lako konstruirati kut od 30° (prepolovimo jedan od kutova u jednakostraničnom trokutu), slijedi da se kut $\frac{\beta}{3} = 30^\circ - \frac{\alpha}{3}$ može konstruirati i stoga je β trisektibilan.

Teorem 5.0.6. *Šiljasti kutovi primitivnog Pitagorinog trokuta (a, b, c) su trisektibilni ako i samo ako je c potpuni kub.*

Dokaz.
$\Rightarrow$ Neka su šiljasti kutovi primitivnog Pitagorinog trokuta (a, b, c) trisektibilni. Po teoremu

1.3.3, polinom $4x^3 - 3x - \frac{b}{c}$ ima racionalni korijen. Neka je $\frac{y}{z}$ takav korijen da su y i z relativno prosti, $z > 0$. Slijedi da

$$4\left(\frac{y}{z}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{b}{c} \quad \text{ili} \quad \frac{y(4y^2 - 3z^2)}{z^3} = \frac{b}{c}.$$

Ako je z neparan broj, onda su oba razlomka u drugoj jednakosti potpuno skraćeni. Kako bismo to vidjeli, pretpostavimo da je p prim broj koji dijeli $y(4y^2 - 3z^2)$ i z^3. Slijedi da je p neparan te dijeli z i $4y^2 - 3z^2$. To povlači da p dijeli $4y^2$, a stoga i y, što dovodi do kontradikcije s činjenicom da su y i z relativno prosti. Slijedi da je $c = z^3$.

Ako je z paran broj (znamo da je y neparan jer su z i y relativno prosti), tada je $z = 2w$. U tom slučaju,

$$\frac{b}{c} = \frac{y(4y^2 - 12w^2)}{8w^3} = \frac{y(y^2 - 3w^2)}{2w^3}.$$

Ako je w paran, onda je (kao u prethodnom slučaju), posljednji razlomak potpuno skraćen i $c = 2w^3$ što dovodi do kontradikcije s činjenicom da je c neparan. Ako je w neparan, onda na sličan način dolazimo do toga da je 2 jedini zajednički faktor od $y(y^2 - 3w^2)$ i $2w^3$ te vidimo da je $2b = y(y^2 - 3w^2)$ i $c = w^3$. Zaključujemo da je c potpuni kub.

$\Leftarrow$ Neka je $c = C^3$ potpuni kub te neka je (A, B, C^3) odgovarajuća primitivna Pitagorina trojka. Po teoremu 5.0.5, postoje primitivne Pitagorine trojke (a, b, C) takve da vrijedi $A = |a^3 - 3ab^2|$ i $B = |b^3 - 3a^2b|$.

Iz

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{b}{C}\right)^3 - 3\left(\frac{b}{C}\right) &= \frac{b(4b^2 - 3C^2)}{C^3} \\ &= \frac{b(4b^2 - 3(a^2 + b^2))}{C^3} \\ &= \frac{b(b^2 - 3a^2)}{C^3} \\ &= \pm\frac{B}{C^3}, \end{aligned}$$

uočavamo da je ili $\frac{b}{C}$ ili $-\frac{b}{C}$ racionalni korijen od $4x^3 - 3x - \left(\frac{B}{C^3}\right)$. Po teoremu 1.3.3 slijedi da su šiljasti kutovi primitivnog Pitagorinog trokuta (A, B, C^3) trisektibilni.

□

Primitivni Pitagorin trokut (44, 117, 125) je najmanji takav trokut čiji su kutovi trisektibilni. Kada je c kub prim broja, postoji samo jedna moguća trojka, tako da su ove vrste primjera relativno jednostavne.

Bibliografija

[1] *Chebyshev polynomials*, https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials#Trigonometric_definition, (kolovoz, 2018.)

[2] M. Artin, *Algebra, Second Edition*, Pearson Education Limited, 2013.

[3] Wen D. Chang i Russell A. Gordon, *Trisecting Angles in Pythagorean Triangles*, The American Mathematical Monthly **121** (2014), br. 7, 625-631, https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.4169/amer.math.monthly.121.07.625?needAccess=true (kolovoz, 2018.)

[4] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, PMF - Matematički odjel, https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf (kolovoz, 2018.)

[5] S. Fischer, *Integer-Sided Triangles with Trisectable Angles - Their Perimeters and Residual, Whitman College, Washington, 2015.*, https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2015/Final%20Project%20-%20Fischer,%20Sam.pdf (lipanj, 2018.)

[6] Russell A. Gordon, *Integer-Sided Triangles with Trisectible Angles*, Mathematics Magazine, **87** (2014), br. 3, 198-211.

[7] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[8] D. Veljan i B. Pavković, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

Sažetak

Trokuti s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima posebna su klasa trokuta. Kosinusi kutova takvih trokuta su racionalni brojevi s dodatnim svojstvom da se mogu izraziti pomoću stanovitog polinoma 3. stupnja. Pokazuje se da ne postoje jednakostranični i jednakokračni pravokutni takvi trokuti. U ovom radu naglasak smo stavili na raznostranične trokute s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima, no osvrnuli smo se i na postojanje jednakokračnih koji nisu pravokutni te pravokutnih takvih trokuta.

Pokazuje se da ključnu ulogu za postojanje razmatrane vrste trokuta ima tzv. rezidual, a to je pozitivni cijeli broj koji je na jednostavan način povezan s racionalnom vrijednosti kosinusa. Preciznije, dva šiljasta kuta s racionalnim kosinusima imaju isti rezidual ako i samo ako postoji trokut s cjelobrojnim stranicama koji sadrži ta dva kuta. Nadalje, pomoću reziduala dolazi se do opće formule za stranice promatranih raznostraničnih trokuta koji nemaju pravi kut. Glavni rezultat ovog rada otkriva da za svaki kvadratno slobodan pozitivan cijeli broj r postoji beskonačno mnogo različitih trokuta s cjelobrojnim stranicama i trisektibilnim kutovima kojima je zajednički rezidual jednak r. U radu su izložene jednostavne metode za generiranje takvih trokuta te niz primjera za odgovarajuće duljine triju stranica. Konačno, pokazuje se da su šiljasti kutovi primitivnog Pitagorinog trokuta su trisektibilni ako i samo ako je hipotenuza potpuni kub.

Summary

Integer-sided triangles with trisectible angles are a special class of triangles. Cosines of angles of such triangles are rational numbers with the additional property of representation by a specific third degree polynomial. It is shown that no equilateral triangles and no right angled isosceles triangles belong to that class. In this paper, the emphasis is placed on scalene integer-sided triangles with trisectible angles, but the existence of right triangles with these properties is thoroughly investigated, too, as well as the inclusion of isosceles triangles without a right angle in that class.

It is shown that the key feature for the existence of the considered triangle type is the so-called residual. Residual is a positive integer that is in a simple way associated to the rational value of the cosine. More precisely, two acute angles with rational cosines have the same residual if and only if there is an integer-sided triangle containing these two angles. Furthermore, a general formula based on residuals is derived for the sidelengths of the observed scalene triangles without a right angle. The main result of this paper reveals that for each square-free positive integer r there exist infinitely many distinct scalene integer-sided triangles with trisectible angles and with r as their common residual. Some simple methods for generating such triangles are presented and examples for the corresponding sidelengths are given. Finally, it is shown that the acute angles of primitive Pythagorean triangles are trisectible if and only if their hypotenuse is a perfect cube.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu 19.7.1992. godine. Živim u Svetom Križu Začretju, gdje sam 1999. godine upisala Osnovnu školu Sveti Križ Začretje. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja 2007. godine upisala sam prirodoslovno-matematički smjer Gimnazije Antuna Gustava Matoša u Zaboku. Potom 2011. godine na matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer. Završetkom preddiplomskog studija te stjecanjem prvostupničke diplome 2016. godine na istom fakultetu upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer.